ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

السنة الثانية بكالوريا
علوم رياضية

السنة الدراسية :
2011 – 2010

فرض محروس رقم:02

الأستاذ : أحمد مومني

سلم التنقيط

التمرين رقم 01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2\left|Arc\tan\dfrac{1}{x}\right| & , \quad x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

الجزء الأول:

1 – بين أن: $\dfrac{x}{3} \langle \dfrac{x - Arc\tan x}{x^2} \langle 0 \qquad (\forall x \in]0,+\infty[)$ — 1 ن

2 – a – بين أن: $Arc\tan|x| + Arc\tan\dfrac{1}{|x|} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$ — 1 ن

b – استنتج أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x-1)^2 Arc\tan\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}}{x} = -(1+\pi)$

و أن : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-(x-1)^2 Arc\tan\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}}{x} = (1-\pi)$ — 1 ن

3 – a – أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x) + x\right)$ — 0,5 ن

b– نضع: $t = \dfrac{1}{x}$

تحقق أن: $f(x) - (x-2) = 2 + (t-2)\dfrac{Arc\tan t}{t} + \dfrac{Arc\tan t - t}{t^2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ — 0,75 ن

الجزء الثاني:

1 – أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ — 1 ن

2 – a – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 — 0,5 ن

b – أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة 0 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها — 0,5 ن

3 – باستعمال نتائج السؤال 3) من الجزء الأول حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) — 1 ن

4 – لكل x من $\mathbb{R}^*$ نضع : $h(x) = 2Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x-1}{x^2+1}$

a – أدرس تغيرات الدالة h — 1,5 ن

b – استنتج إشارة الدالة h على $\mathbb{R}^*$ — 0,5 ن

c – بين أن: $\begin{cases} f'(x) = (x-1)h(x) & (\forall x > 0) \\ f'(x) = (1-x)h(x) & (\forall x < 0) \end{cases}$ — 1 ن

d – استنتج جدول تغيرات الدالة f — 0,5 ن

5 – ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty,0[$. أثبت أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده — 0,5 ن

6 – أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{g^{-1}}\right)$ 2 ن

7– ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $0<x<y$ 1,75 ن

بين أن : $f(y)-f(x)<(y-x)(\pi+1)|\alpha-1| \qquad \left(\exists\alpha\in\left]x,y\right[\right)$

8– لتكن $\left(U_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} U_0\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[\\ U_{n+1}=\dfrac{f\left(U_n\right)}{2\left(U_n-1\right)}+1 \quad , \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right) \end{cases}$$

a– بين أن: $U_n\neq 1 \qquad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ 0,5 ن

b– بين أن : $\left|U_{n+1}-1\right|\leq\dfrac{\pi}{4}\left|U_n-1\right| \qquad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ 0,75 ن

c– استنتج نهاية المتتالية $\left(U_n\right)$ 0,75 ن

....

التمرين رقم 02

نربط كل عدد حقيقي a غير منعدم بالدالة العددية f_a المعرفة كما يلي:

$$f_a\left(x\right)=Arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) \qquad \left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{a}\right\}\right)$$

1 – أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f_a(x)$ ثم بين أن : $f_a'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$ 1 ن

2– نفترض أن $a\in\mathbb{R}_-^*$

بين أنه مهما يكن x من $\left]\dfrac{1}{a},+\infty\right[$ فإن: $f_a(x)=Arctan\,x+Arctan\,a$ 1 ن

و أنه مهما يكن x من $\left]-\infty,\dfrac{1}{a}\right[$ فإن: $f_a(x)=Arctan\,x+Arctan\,a+\pi$

3– أ - تحقق أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$ فإن: $-f_{-a}(-x)=f_a(x)$ 0,25 ن

ب - استنتج أنه إذا كان $a\in\mathbb{R}_+^*$ فإن : 0,75 ن

$$\begin{cases} \left(\forall x>\dfrac{1}{a}\right) \quad f_a(x)=Arc\tan\left(x\right)+Arc\tan\left(a\right)-\pi \\ \left(\forall x<\dfrac{1}{a}\right) \quad f_a(x)=Arc\tan\left(x\right)+Arc\tan\left(a\right) \end{cases}$$

AHMED MOUMNI